63/1 (SEM-3) (GE3/DSC) MATHG/RC3036

2023

MATHEMATICS

Paper : MATHG/RC3036

(Real Analysis)

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. Choose the correct answer of any *six* of the following : 1×6=6

তলৰ যি কোনো ছয়টাৰ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা :

(a) Which of the following infinite sets is countable?

তলৰ কোনটো অসীম সংহতি গণনীয়?

(i) $\mathbb{N}$

(ii) Q^C

(iii) $\mathbb{R}$

(iv) $]-1, 1[$

(b) The set $\{r \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{5}\}$ has

$\{r \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{5}\}$ সংহতিৰ

(i) a maximum

এটা উচ্চমান আছে

(ii) a minimum

এটা নিম্নমান আছে

(iii) both a maximum and a minimum

এটা উচ্চমান আৰু এটা নিম্নমান আছে

(iv) neither a maximum nor a minimum

উচ্চমানও নাই নিম্নমানও নাই

(c) Which one of the following statements is not true?

তলৰ কোনটো উক্তি সত্য নহয়?

(i) $\mathbb{R}$ is a complete ordered field

$\mathbb{R}$ এটা সম্পূর্ণ ক্রমিক ক্ষেত্র

(ii) $\mathbb{R}$ is an ordered field

$\mathbb{R}$ এটা ক্রমিক ক্ষেত্র

(iii) $\mathbb{Q}$ is a complete ordered field

$\mathbb{Q}$ এটা সম্পূর্ণ ক্রমিক ক্ষেত্র

(iv) $\mathbb{Q}$ is an ordered field

$\mathbb{Q}$ এটা ক্রমিক ক্ষেত্র

(d) Which of the following statements do you think to be true?

তলৰ কোন উক্তিটোক সঁচা বুলি ভাবা?

The cluster points of the set $]0, 1[$ are

$]0, 1[$ সংহতিৰ ক্লাছতাৰ বিন্দু

(i) No points of the set $]0, 1[$

$]0, 1[$ সংহতিৰ কোনো বিন্দুৱেই নহয়

(ii) Only the point 0

কেৱল 0

(iii) Only the point 1

কেৱল 1

(iv) All points of the set $[0, 1]$

$[0, 1]$ সংহতিৰ আটাইকেইটা বিন্দু

(e) If l is the least upper bound of a bounded sequence $\langle a_n \rangle$, then which of the following is not correct? (ε is any positive real number)

যদি l অনুক্রম এটাৰ আটাইতকৈ সৰু উচ্চ সীমা হয়, তেন্তে তলৰ কোন উক্তিটো সত্য নহয়? (ε এটা যি কোনো ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা)

(i) $a_n \leq l \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n > l + \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n < l + \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $\exists n \in \mathbb{N}$ such that $a_n > l - \varepsilon$

(f) What type of sequence is $\langle a_n \rangle$?
$\langle a_n \rangle$ অনুক্রমটো কি প্ৰকাৰৰ?
where (যত)

$$a_n = \frac{2n-7}{3n+2}$$

(i) Oscillatory
দোদুল্যমান

(ii) Monotonically increasing
একদিষ্ট বৰ্ধমান

(iii) Monotonically decreasing
একদিষ্ট হ্ৰাসমান

(iv) Unbounded
অপৰিবদ্ধ

(g) What is the limit of the sequence $\langle a_n \rangle$?
$\langle a_n \rangle$ অনুক্ৰমটোৰ সীমা কিমান?
Where (যত)

$$a_n = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}^n$$

(i) 1

(ii) 0

(iii) ± 1

(iv) Doesn't exist / স্থিত নহয়

(h) A given geometric series is
প্ৰদত্ত গুণোত্তৰ শ্ৰেণী হ'ল

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \cdots \cdots ; |x| < 1$$

This series is / এই শ্ৰেণীটো

(i) convergent
অভিসাৰী

(ii) divergent
অপসাৰী

(iii) oscillatory
দোদুল্যমান

(iv) conditionally convergent
চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী

(i) The radius of convergence of the following series is
তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰী ব্যাসাৰ্ধ হ'ব

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} x^n$$

(i) 1

(ii) 0

(iii) -1

(iv) ∞

(j) If a power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

converges at the end point $x = r$ of the interval of convergence $[-r, r]$, then in the closed interval $[0, r]$, the series is

যদি এটা ঘাত শ্ৰেণী

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

অভিসাৰী অন্তৰাল $[-r, r]$ৰ প্ৰান্ত বিন্দু $x = r$ত অভিসৰণ কৰে, তেন্তে বদ্ধ অন্তৰাল $[0, r]$ত শ্ৰেণীটো

(i) pointwise convergent
বিন্দোনুসাৰে অভিসাৰী

(ii) uniformly convergent
সমভাৱে অভিসাৰী

(iii) divergent
অপসাৰী

(iv) oscillatory
দোদুল্যমান

2. Answer any *five* of the following questions :
তলৰ যি কোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া : $2 \times 5 = 10$

(a) Prove that for two countable sets X and Y, $X \cup Y$ is also countable.
প্ৰমাণ কৰা যে X আৰু Y দুটা গণনীয় সংহতিৰ বাবে $X \cup Y$ও এটা গণনীয় সংহতি।

(b) Find the supremum and infimum of the following set :
তলৰ সংহতিটোৰ উচ্চমান আৰু নিম্নমান উলিওৱা :

$$S = \left\{ 8 + \frac{3}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

(c) Prove that the sequence $\langle a_n \rangle$ is bounded,
প্ৰমাণ কৰা যে $\langle a_n \rangle$ অনুক্ৰমটো পৰিবদ্ধ,
where (যত)

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \ n \in \mathbb{N}$$

(d) Find the limit of the following sequence :
তলৰ অনুক্ৰমটোৰ সীমা উলিওৱা :

$$\left\langle \frac{2n+1}{n+1} \right\rangle$$

(e) Define alternating series with example.
উদাহৰণৰসৈতে একান্তৰ শ্ৰেণী এটাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(f) Show that the following series is not convergent :
দেখুওৱা যে লগত উল্লেখিত শ্ৰেণী অভিসাৰী নহয় :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$$

(g) Let $0 < r < 1$. Then show that the sequence $\langle r^n \rangle$ is convergent.

ধৰা হওক $0 < r < 1$, তেতিয়াহ'লে দেখুওৱা যে এই অনুক্ৰম $\langle r^n \rangle$ টো অভিসাৰী হ'ব।

3. Answer any *six* of the following questions : 5×6=30

তলৰ যি কোনো ছয়টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Suppose that S and T are sets such that $T \subseteq S$. Then prove the following :

যদি S আৰু T এনে দুটা সংহতি হয় যে $T \subseteq S$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

(i) If S is a finite set, then T is a finite set.

S সসীম হ'লে T সসীম হ'ব।

(ii) If T is an infinite set, then S is an infinite set.

T অসীম হ'লে S অসীম হ'ব।

(b) Prove that the following statements are equivalent :

প্ৰমাণ কৰা যে তলত উল্লেখিত উক্তিবোৰ সমতুল্য :

(i) S is a countable set.

S সংহতি গণনীয়।

(Continued)

(ii) There exists a surjection $\mathbb{N}$ onto S.

এটা $\mathbb{N}$ৰ পৰা Sলৈকে আচ্ছাদক বা ছাৰজেকচন আছে।

(iii) There exists an injection of S into $\mathbb{N}$.

এটা Sৰ পৰা $\mathbb{N}$লৈকে অনাচ্ছাদক বা ইনজেকচন আছে।

(c) Define limit point of a set. Give one example of a set which has *(i)* no limit point, *(ii)* only one limit point and *(iii)* a limit point not belonging to the set. 2+1+1+1=5

এটা সংহতিৰ সীমা বিন্দুৰ সংজ্ঞা দিয়া। *(i)* এটাও সীমা বিন্দু নথকা, *(ii)* কেৱলমাত্ৰ এটা সীমা বিন্দু থকা আৰু *(iii)* সংহতিৰ বাহিৰত সীমা বিন্দু থকা সংহতিৰ প্ৰত্যেকৰে এটাকৈ উদাহৰণ দিয়া।

(d) State Archimedean property of real numbers. Use it to prove that if $a, b \in \mathbb{R}$ such that

$$a \le b + \frac{1}{n} \ \forall \, n \in \mathbb{N}$$

then $a \le b$. 2+3=5

বাস্তৱ সংখ্যাৰ আৰ্কিমিডিয়ান বৈশিষ্ট্যটো লিখা। ইয়াৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ কৰা যে, যদি $a, b \in \mathbb{R}$ এনে দুটা সংখ্যা হয় যে $a \le b + \frac{1}{n} \ \forall \, n \in \mathbb{N}$, তেন্তে $a \le b$.

(Turn Over)

(e) Define M_n-test and show that the sequence $\langle f_n \rangle$, where

$$f_n(x) = \frac{nx}{l + n^2 x^2}$$

is not uniformly convergent on any interval containing zero.

M_n-পৰীক্ষা ব্যাখ্যা কৰা আৰু দেখুওৱা যে $\langle f_n \rangle$ অনুক্ৰমটো শূন্য অন্তৰ্ভুক্ত যি কোনো অন্তৰালত সমভাৱে অভিসাৰী নহয় য'ত

$$f_n(x) = \frac{nx}{l + n^2 x^2}$$

(f) Show that every convergent sequence of real numbers is bounded, but the converse is not true. 3+2=5

দেখুওৱা যে প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যাৰ অভিসাৰী অনুক্ৰম এটা পৰিবদ্ধ, কিন্তু বিপৰীত উক্তি সত্য নহয়।

(g) Show that every monotonically increasing sequence which is bounded above converges to its least upper bound.

দেখুওৱা যে একদিষ্ট বৰ্ধমান (monotonically increasing sequence) ঊৰ্ধ্ব পৰিবদ্ধ (bounded above) অনুক্ৰম এটা ইয়াৰ ন্যূনতম উচ্চসীমাত অভিসাৰী হয়।

(h) Show that the following series converges or diverges according as $\beta > \alpha + 1$ or $\beta \le \alpha + 1$: 2+3=5

দেখুওৱা যে তলৰ শ্ৰেণীটো $\beta > \alpha + 1$ বা $\beta \le \alpha + 1$ চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী নাইবা অপসাৰী :

$$1 + \frac{1+\alpha}{1+\beta} + \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1+\beta)(2+\beta)} + \cdots \cdots \cdots \text{ to } \infty$$

(i) Test the uniform convergence of the series :

তলৰ শ্ৰেণীৰ সুষম অভিসাৰিতা (uniform convergence) পৰীক্ষা কৰা :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4};\ x \in \mathbb{R}$$

(j) Define radius of convergence and interval of convergence of a power series. Find also the radius of convergence of the series :

এটা ঘাত শ্ৰেণীৰ অভিসৰণ ব্যাসাৰ্ধ আৰু অভিসৰণ অন্তৰালৰ সংজ্ঞা দিয়া। তলত দিয়া ঘাত শ্ৰেণীটোৰ অভিসৰণ ব্যাসাৰ্ধ উলিওৱা :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots \cdots \cdots$$

4. Answer any *two* of the following questions : 10×2=20

তলৰ যি কোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Show that the series given below—
তলত দিয়া অনুক্ৰম—

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

(i) is convergent if (অভিসাৰী যদিহে) $p > 1$

(ii) is divergent if (অপসাৰী যদিহে) $p \leq 1$

5+5=10

(b) (i) Prove that for a non-empty set of real numbers supremum and infimum are unique, if exists. 5

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেক অৰিক্ত সংহতিৰ ন্যূনতম উচ্চ পৰিবদ্ধ আৰু উচ্চতম নিম্ন পৰিবদ্ধ থাকিলে অদ্বিতীয় হ'ব।

(ii) Prove that every open interval is an open set. 5

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেক মুক্ত অন্তৰাল একো-একোটা মুক্ত সংহতি।

(c) (i) Show that if $\langle a_n \rangle$ and $\langle b_n \rangle$ are convergent sequences, then the sequences $\langle u_n \rangle$ and $\langle v_n \rangle$ defined by

দেখুওৱা যে যদি $\langle a_n \rangle$ আৰু $\langle b_n \rangle$ দুটা অনুক্ৰম

(Continued)

হয় তেন্তে তলত দিয়া সংজ্ঞামতে $\langle u_n \rangle$ আৰু $\langle v_n \rangle$ অনুক্ৰম দুটা

$$u_n = \max\{a_n, b_n\}$$
$$\text{and } v_n = \min\{a_n, b_n\}$$

are also convergent (অভিসাৰী হ'ব).

2+2=4

(ii) State the monotone convergence theorem. 2

একদিষ্ট অভিসৰণ উপপাদ্যটো বৰ্ণনা কৰা।

(iii) Let $S_1 > 0$ be arbitrary and define

ধৰা $S_1 > 0$ আৰু

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}\left(S_n + \frac{a}{S_n}\right) \forall n$$

Show that the sequence $\langle S_n \rangle$ converges to $\sqrt{a}$. 4

দেখুওৱা যে $\langle S_n \rangle$ অনুক্ৰম $\sqrt{a}$ লৈ অভিসাৰী হয়।

(d) (i) State the Cauchy criterion for series. Apply it to prove that if a series in $\mathbb{R}$ is absolutely convergent, then it is convergent. 1+4=5

শ্ৰেণীৰ বাবে কচিৰ চৰ্ত বৰ্ণনা কৰা। এই চৰ্ত প্ৰয়োগ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে যদি $\mathbb{R}$ত শ্ৰেণী এটা পৰম অভিসাৰী হয়, তেন্তে সেই শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হ'ব।

(Turn Over)

(ii) If a series Σa_n is convergent, then prove that the series obtained from it by grouping the terms is also convergent. Is the converse true? Justify your answer with example. 2+1+2=5

যদি Σa_n শ্ৰেণী এটা অভিসাৰী হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে সেই শ্ৰেণীটোৰ পদকেইটা সংবদ্ধ কৰি পোৱা নতুন শ্ৰেণীটোও অভিসাৰী হ'ব। ইয়াৰ বিপৰীত উক্তি সঁচা নে? তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে উদাহৰণৰসৈতে যুক্তি দৰ্শোৱা।

5. Answer any *one* of the following : 14

তলৰ যি কোনো এটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) *(i)* Prove that the sequence $\langle a_n \rangle$ with a_n given below converges to a limit lying between 2 and 3.

প্ৰমাণ কৰা যে $\langle a_n \rangle$ অনুক্ৰমটো 2 আৰু 3 সংখ্যাৰ মাজৰ সংখ্যা এটালৈ অভিসৰণ কৰে,

where (যত) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Examine the convergence of the following series :

তলৰ শ্ৰেণীৰ দুটাৰ অভিসাৰিত্ব পৰীক্ষা কৰা :

(ii) $\frac{1}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 4^2}+\cdots\cdots$

(Continued)

(iii) $\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots\cdots$

7+3+4=14

(b) *(i)* Define uniform convergence of a sequence.

এটা অনুক্ৰমৰ সুষম অভিসাৰিতাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(ii) Show that the sequence $\langle a_n \rangle$, where $a_n(x) = x^n$

দেখুওৱা যে $\langle a_n \rangle$ অনুক্ৰম, যত $a_n(x) = x^n$

1. is uniformly convergent in the interval $[0, k]$ with k is a number less than 1;

   $[0, k]$ অন্তৰালত সুষম অভিসাৰী, য'ত k হ'ল 1 তকৈ সৰু এটা বাস্তৱ সংখ্যা;

2. is pointwise convergent only in the interval $[0, 1]$.

   কেৱল $[0, 1]$ অন্তৰালত বিন্দোনুসাৰে অভিসাৰী।

(iii) If the series $\Sigma a_n x^n$ is such that $a_n \neq 0 \ \forall n$ and

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$$

then show that $\Sigma a_n x^n$ is absolutely

(Turn Over)

convergent for $|x|<R$ and divergent for $|x|>R$. 2+(3+3)+6=14

যদি $\Sigma a_n x^n$ শ্ৰেণীটো এনেকুৱা হয় যে $a_n \neq 0 \ \forall n$ আৰু $\left|\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$ তেন্তে দেখুওৱা যে $\Sigma a_n x^n$ শ্ৰেণীটো $|x|<R$ৰ বাবে পৰম অভিসাৰী হ'ব আৰু $|x|>R$ৰ বাবে অপসাৰী হ'ব।

(c) Let $J \subseteq \mathbb{R}$ and let $\langle f_n \rangle$ be a sequence of continuous functions of J to $\mathbb{R}$. Suppose that $\exists\, x_0 \in J$ such that $\langle f_n(x_0) \rangle$ converges and that the sequence $\langle f_n' \rangle$ of derivatives exists on J and converges uniformly on J to a function g. Then prove that the sequence $\langle f_n \rangle$ converges uniformly on J to a function f that has a derivative at every point of J and $f' = g$. 14

ধৰা হ'ল $J \subseteq \mathbb{R}$ আৰু $\mathbb{R}$ৰ J অন্তৰালত $\langle f_n \rangle$ হ'ল অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ এটা অনুক্ৰম। ধৰা $\exists\, x_0 \in J$ এনে এটা বিন্দু যে $\langle f_n(x_0) \rangle$ অভিসাৰী আৰু $\langle f_n' \rangle$ হ'ল J অন্তৰালত অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ অনুক্ৰম $\langle f_n \rangle$ৰ অৱকলনৰ অনুক্ৰম যি g ফলনত সুষম অভিসাৰী। তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে J অন্তৰালত $\langle f_n \rangle$ অনুক্ৰম f ফলনত সুষম অভিসাৰী হয় আৰু J অন্তৰালৰ প্ৰতিটো বিন্দুত অৱকলনীয় আৰু $f' = g$.

★★★